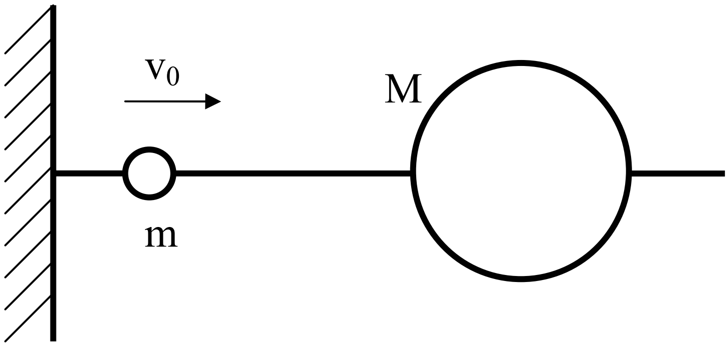
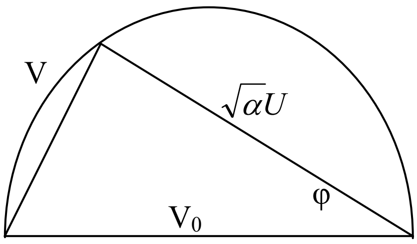


По стержню, прикрепленному к стенке, могут скользить без трения две бусинки с массами m и M как показано на рисунке. В начальный момент времени бусинке m сообщается скорость v0, вторая бусинка покоится. Считая, что все удары абсолютно упругие и масса первой бусинки мала по сравнению с массой второй (m << M), оцените полное количество соударений между бусинками в процессе последующей эволюции системы.

Простое решение без интегралов движения для произвольного соотношения масс:



Закон сохранения энергии: $mV^2/2 + MU^2/2 = mV_0^2/2$,

обозначим: $\alpha = M/m$.

$V_0^2 = V^2 + \alpha U^2$ – величины скоростей образуют прямоугольный треугольник с катетами V и $\sqrt{\alpha}U$, гипотенузой V_0. Построим описанную окружность. Тогда точка для любого состояния системы будет находиться на окружности.

При ударе о стенку скорость V меняет только направление. При соударении между бусинками: в системе центра масс происходит смена направления импульса на противоположное, а значит, и скорости, переход в исходную систему дает новую скорость бусинки: $V' = V - 2V_{ц.м.} = V - 2\dfrac{V + \alpha U}{1+\alpha} = \dfrac{(\alpha-1)V - 2\alpha U}{1+\alpha}$.

Введем угол φ как показано на рисунке. $\sin\varphi = V/V_0$. Начальное значение угла $\pi/2$.

Найдем новое значение угла после одного соударения: $\sin\varphi' = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\sin\varphi - \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}\cos\varphi$.

Заметим, что $(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1})^2 + (\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1})^2 = 1$, поэтому введем новый фиктивный угол:

$\cos\theta = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$, $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$, $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

$\sin\varphi' = \cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi = \sin(\varphi-\theta)$, учитывая диапазон допустимых углов, получаем: $\varphi' = \varphi - \theta$. Тогда для N соударений бусинок: $\varphi_N = \pi/2 - N\theta$.

Предельное значение определяется условием того, что внутренняя бусинка не догоняет внешнюю: $V \le U$, предельное значение для угла: $\mathrm{ctg}\varphi^* = tg(\dfrac{\pi}{2} - \varphi^*) = \sqrt{\alpha}$.

Т.е. начиная с N, удовлетворяющему условию $\pi/2 - N\theta \le \varphi^*$, удары прекратятся.

$N \ge (\pi/2 - \varphi^*)/\theta = arctg\sqrt{\alpha}/arctg(2\sqrt{\alpha}/(\alpha-1))$, искомое значение:

$N = [arctg\sqrt{\alpha}/arctg(2\sqrt{\alpha}/(\alpha-1))] + 1$ (для целого отношения арктангенсов без +1). Все рассуждения приведены для $\alpha > 1$, иначе ответом является $N = 1$.

Ответ: При $\alpha > 1$: $N = [arctg\sqrt{\alpha}/arctg(2\sqrt{\alpha}/(\alpha-1))] + 1$ (для целого отношения арктангенсов $N = [arctg\sqrt{\alpha}/arctg(2\sqrt{\alpha}/(\alpha-1))]$), где $\alpha = M/m$, квадратные скобки обозначают целую часть числа. При $\alpha \le 1$: $N = 1$.

Рассмотрим предельный случай: при $\alpha >> 1$ $N \approx [\pi\sqrt{\alpha}/4]$.

Автор задачи: С.А. Корягин.

Автор решения: А.В. Афанасьев.